Kalenderquadrate

Magische Zahlenquadrate haben die Eigenschaft, dass Zeilen-, Kolonnen- und Diagonalen-Summen alle gleich groß sind. Es gibt andere Zahlenquadrate mit anderen „magischen“ Eigenschaften. Ein beliebiges Quadrat aus einem Kalenderfeld

6	7	8	9
13	14	15	16
20	21	22	23
27	28	29	30

hat beispielsweise die folgende Summeneigenschaft:
Wählt man aus jeder Zeile und jeder Kolonne je genau eine Zahl und addiert diese Zahlen, erhält man immer dieselbe Summe.
Die Auswahl der Zahlen geschieht mit Vorteil nach dem „Streichverfahren“:

Wähle eine Zahl, kreise sie ein und streiche die restlichen Zahlen in derselben Zeile und Kolonne. Wiederhole diesen Schritt, bis keine Zahl mehr übrig bleibt.

6	7	8	9
13	14	15	16
20	21	22	23
27	28	29	30

Aufgaben:

1. Wie lässt sich diese Summe für ein beliebiges „Kalenderquadrat“ am einfachsten berechnen?

2. Was lässt sich über die Summe diagonal gegenüberliegender Zahlen aussagen?

3. Bilde das Produkt der in zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken liegenden Zahlen und subtrahiere das Produkt der Zahlen aus den anderen beiden Ecken. Was lässt sich über diese Differenz aussagen?

4. Eine Zahl im Inneren des Kalenderfeldes hat 8 „Nachbarzahlen“. Wie groß ist jeweils die Summe dieser 8 Nachbarn?

14	15	16
21	22	23
28	29	30

5. Begründe die Aussagen. Gelten diese für jeden beliebigen Kalendermonat, für jede mögliche Quadratgröße?

6. Was ändert sich, wenn die Wochentage im Kalender von oben nach unten statt von links nach rechts gezählt werden?

7. Was ändert sich, wenn man statt eines Zahlenquadrates aus dem Kalenderfeld ein Zahlenrechteck herausgreift?

Lösungen

1. Wie lässt sich diese Summe für ein beliebiges „Kalenderquadrat“ am einfachsten berechnen?
   - Dreier-Quadrat: Mittlere Zahl mal 3
   - Vierer-Quadrat: Summe diagonal gegenüber liegender Ecken mal 2
2. Was lässt sich über die Summe diagonal gegenüberliegender Zahlen aussagen?
   - Ist gleich groß,
   - Im Dreier-Quadrat gleich dem Doppelten der mittleren Zahl
   - Im Vierer-Quadrat gleich der Summe der inneren Diagonalzahlen
3. Bilde das Produkt der in zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken liegenden Zahlen und subtrahiere das Produkt der Zahlen aus den anderen beiden Ecken. Was lässt sich über diese Differenz aussagen?

– Zweier-Quadrat: links unten = x
  $x(x - 6) - (x - 7)(x + 1) = x^2 - 6x - x^2 + 6x + 7 = \mathbf{7}$

– Dreier-Quadrat: mittlere Zahl = x
  $(x - 6)(x + 6) - (x - 8)(x + 8) = x^2 - 36 - x^2 + 64 = \mathbf{28}$

– Vierer-Quadrat: mittlere Zahl = x
  $(x - 9)(x + 9) - (x - 12)(x + 12) = x^2 - 81 - x^2 + 144 = \mathbf{63 = 7(n - 1)^2}$

4. Eine Zahl im Inneren des Kalenderfeldes hat 8 „Nachbarzahlen“. Wie groß ist jeweils die Summe dieser 8 Nachbarn? 8x
5. Begründe die Aussagen. Gelten diese für jeden beliebigen Kalendermonat, für jede mögliche Quadratgröße?
6. Was ändert sich, wenn die Wochentage im Kalender von oben nach unten statt von links nach rechts gezählt werden?
   Nichts
7. Was ändert sich, wenn man statt eines Zahlenquadrates aus dem Kalenderfeld ein Zahlenrechteck herausgreift?
   1. Diese Summe ist nicht mehr definiert.
   2. Die Summen diagonal gegenüberliegender Zahlen sind immer noch gleich.
   3. Ist immer noch eine nur von der Größe des Rechtecks abhängige 7-er Zahl.
   4. Frage macht keinen Sinn mehr.