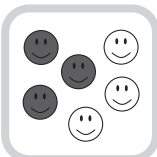
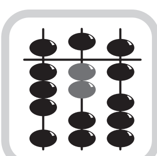
Zahlen bündelnd zerlegen

Wie viele Bonbons sind in einem Glas? Wie kann man das möglichst schnell herausfinden? Wie kann man sie gerecht verteilen? Das sind einige Fragen, die Kinder interessieren. Das Bündeln als Zähltechnik ist den Kindern schon bekannt. Jetzt wird sie auf größere Zahlen angewendet. Eine neue Herausforderung bedeutet die Frage, wie sich eine bestimmte Menge „gerecht", also gleichmäßig und ohne Rest, aufteilen lässt.

Schwerpunkte der Arbeit und Beobachtung

 Anzahlen und Maßzahlen erfassen	Das bündelnde Zerlegen ist eine Grundtechnik – nicht nur beim Zählen sondern auch beim Schätzen von größeren Mengen. Wie viele Kinder sind in der Schule? Dazu kann man die Klassen zählen und für jede Klasse eine Anzahl Kinder schätzen. **Wer kann größere Zahlen schätzen?** **Wer benützt beim Schätzen die Bündelungs-Technik?** ➔ Anzahlen bis 100 bündelnd erfassen ➔ Anzahlen bis 100 vergleichen und schätzen
 Zahlen zerlegen	Das bündelnde Zählen dient der Entdeckung der multiplikativen Zerlegbarkeit (Teilbarkeit) als Eigenschaft der Zahlen: Zu jeder Zahl gibt es Bündelungen, die aufgehen (Bündelgröße ist Teiler), und solche, die nicht aufgehen (Bündelgröße ist kein Teiler). Es gibt Zahlen, die auf verschiedene Arten als Produkt geschrieben werden können ($24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = ...$) und besondere Zahlen p mit genau zwei Zerlegungen: $p \cdot 1$ und $1 \cdot p$ (Primzahlen). Analog zur additiven Zerlegung von Zahlen im ersten Schuljahr geht es nun um die multiplikative Zerlegung. Wie viele Malrechnungen gibt es zu einer Zahl? **Wer kann Zahlen auf verschiedene Arten bündelnd zerlegen?** **Wer findet zu Zerlegungen passende Rechnungen?** ➔ Zahlen bis 100 in Faktoren zerlegen
 Operationen mit Handlungen und Situationen verbinden	Das Bündeln dient als Modell für das zeitlich-sukzessive Verständnis der Multiplikation: Zählend „Häufchen schieben", z. B. „6 und noch 6 und noch $6 = 3 \cdot 6 = 18$ Plättchen". Bündelungen, die aufgehen, lassen sich als rechteckige Anordnungen darstellen. Sie führen zu Punktbildern als räumlich-simultanem Modell der Multiplikation. Der Übergang von der fortgesetzten Addition (dem schrittweise Zählen) $6 + 6 + 6$ zur Darstellung als Multiplikation $3 \cdot 6$ erfolgt zwanglos und entspricht dem umgangssprachlichen „Mal". **Welche Anordnungen finden die Kinder?** **Welche Bilder verbinden die Kinder mit der Multiplikation?** ➔ Anzahlen bündelnd und gliedernd berechnen ➔ Mengen aufteilen und verteilen
Begriffe	Begriffe Multiplikation, „mal", Malpunkt

Bündeln: Zahlen greifbar machen

Mit Zahlen verhält es sich wie mit gewissen Tieren: So lange sie noch klein sind, sind sie niedlich und harmlos. Probleme gibt es erst, wenn sie groß werden. Mengen von bis zu fünf Punkten kann man auf einen Blick erkennen. Geordnet wie auf Dominosteinen, kann man auch neun Punkte noch gut erfassen. In unseren Sprachen haben kleine Zahlen eigene Namen, die schon Kleinkinder in Versen lernen. Kleine Zahlen festzuhalten ist auch nicht schwierig. Es genügt, entsprechend viele Steinchen beiseite zu legen, Kerben in ein Holz zu schnitzen oder Striche aufs Papier zu bringen. Bis zur Neun haben Zahlen in unserer Schrift sogar ein eigenes Schriftzeichen.
Die Schwierigkeiten beginnen erst bei den größeren, bei den großen Zahlen (was man hier auch immer unter „groß" verstehen mag). Es braucht ein System, um größere Anzahlen *festzustellen* (Wie viele Zettel sind in der Urne?), die festgestellte Anzahl zu *benennen* (so, dass andere das verstehen) und *aufzuschreiben*.

Die Strategie, um größere Zahlen in den Griff zu bekommen, ist immer dieselbe: Man fasst eine kleinere, noch einfach zähl-, benenn- und schreibbare Anzahl zu einer neuen Einheit, einem so genannten „Bündel" zusammen. Beispiel:

||||||||||||||||||||||| dreiundzwanzig

𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||| 23

Dreiundzwanzig Striche abzuzählen ist mühsam (habe ich wirklich 23 gezeichnet?). Viel einfacher ist es, wenn die Striche in Fünferbündeln zusammengefasst werden: Auf einen Blick kann man erkennen, dass ein Bündel fünf Striche umfasst und dass es vier Bündel und noch drei einzelne Striche sind. Eine andere Bündelung liegt dem Zahlwort „dreiundzwanzig" zu Grunde. Übersetzt heißt es, dass die Zahl aus drei Einern und zwei Zehnern (Zehnerbündeln) besteht. In der Ziffernschreibweise „23" steht die 2 für zwei Zehner (weil sie links steht), die 3 für drei Einer. Gelesen wird die Zahl „23" entgegen unserer normalen Leserichtung von rechts nach links: Zuerst die „drei" gefolgt von „und zwanzig".

In ein paar Zeilen haben wir hier den Sprung von der primitiven (aber durchaus zweckdienlichen) Kerbenschrift zum hochentwickelten Zehner-Stellenwertsystem gemacht. Davon, dass dieser Schritt durchaus nicht so einfach war und ist, wie er hier erscheinen mag, zeugen die zahlreichen historischen Versuche, Zahlen zu benennen und aufzuschreiben. In der Schule stellen sich in diesem Zusammenhang die Fragen:

- Was ist das wichtigste am Stellenwertsystem, das alle mitbekommen sollten?
- Wie viel „Geschichte" brauchen die Kinder, um das System in seiner Raffiniertheit zu verstehen?

Bündeln als Grundstrategie des Zählens

Das Wichtigste der Zahl-Erfassung, der rote Faden durch alle historischen Bemühungen, ist das Grundprinzip:

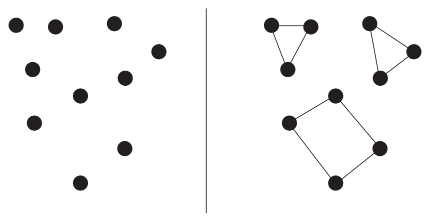
Der Umgang mit großen Zahlen wird einfacher, wenn man sie in kleinere unterteilt.

Diese Grundstrategie kann auch ohne geschichtliche Exkurse ganz praktisch erfahren werden. Bei der Aufgabe, eine größere Menge Reiskörner, Spielkarten oder was auch immer zu zweit oder zu dritt abzuzählen, wird sich früher oder später die Methode der „Häufchen" durchsetzen. Sie ist schneller, sicherer und einfacher arbeitsteilig durchzuführen als das bloße Durchzählen. Bei abweichenden Zähl-Ergebnissen können Fehler auch rascher gefunden werden. Die einzige Bedingung, um die Kraft des Bündelns bei großen Zahlen zu erfahren, ist, dass die zu zählende Menge genügend groß ist, d. h. ein paar hundert Elemente umfasst. Mit Zehner-, Hunderter- und Tausenderbündeln kann die Anzahl ohne weitere Rechnung direkt aufgeschrieben werden. Die Kraft dieses Prinzips können und sollten alle Lernenden erleben.
Die Geschichte der Zahlzeichen bietet viele Bezüge zur Entwicklung der Menschheit allgemein, der Geistesgeschichte und der Mathematik. Überbleibsel historischer Bündelungen wie die Einheit „Dutzend", unsere Zeiteinteilung als Beispiel des babylonischen 60er-Systems, römische Zahlzeichen auf Uhren und Gebäuden können durchaus für alle von Interesse sein. Sie sollten aber nur als Anregungen zu weiterem Forschen und nicht allen als obligatorische Inhalte beigebracht werden.

Bündeln im 1. und 2. Schuljahr

1. Schuljahr
Anzahlen bis 5 oder 6 kann man auf einen Blick erkennen. Kann man eine Anzahl nicht direkt erfassen, zerlegt man sie in überschaubare Teile. Größere Zahlen erfasst man, indem man sie unterteilt und die Teilzahlen addiert.

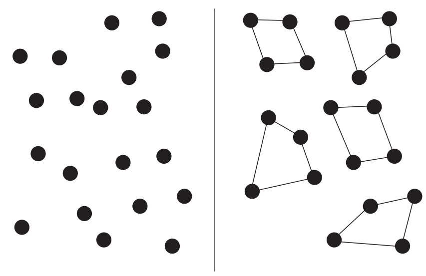
Beispiel:



?? $\quad 4 + 3 + 3 = 10$

2. Schuljahr
Mengen können einfacher erfasst werden, wenn man sie in gleich große Teilmengen zerlegt (bündelt). Bei gleich großen Bündeln kann man multiplizieren statt addieren.

Beispiel:



?? $\quad 5 \cdot 4 = 20$

Literatur: Artikel erschienen in „Grundschule Mathematik“ Heft 1/2004, Seiten 44–45.

Aus dem Unterricht

Der Satz: „Heute beginnen wir mit dem Einmaleins!“ löst Jubel aus. „Endlich!“ Selbst Damian, der sofort ruft: „Ich kann schon alles!“ und sogleich versucht, das zu beweisen, indem er laut mehrere Reihen ruft, scheint sich zu freuen.
Wie kommt es zu dieser Begeisterung? Ich bin immer wieder erstaunt. Wenn ich an meine eigenen Erfahrungen im Rechnen in der Grundschule denke, habe ich nur Erinnerungen an Nicht-Verstehen, Gefühle der Hilflosigkeit, sogar der Angst. Rechnen erlebte ich als Vormachen-Nachmachen. Manches verstand ich nicht, machte viele Fehler, resignierte schließlich. Ich hielt mich für dumm, andere glaubten das auch. Mein Desinteresse wuchs, und ich versuchte, mich beim Rechnen zu drücken, wo ich nur konnte. Erst als Lehrerin habe ich mit und von den Kindern gelernt, wie interessant Rechnen sein kann.
Wie aber schaffe ich es, die Faszination der Kinder zu erhalten? Wie groß ist mein Anteil überhaupt? Ermöglicht nicht vielmehr das reichhaltige Angebot den Kindern, auf eigenen Wegen oder gemeinsam mit anderen Zugänge zur Welt der Zahlen zu finden und möglichst große Sach-, Selbst- und Sozialkompetenz zu erwerben? Ich wünsche mir, dass die Kinder sich gern an ihren Rechenunterricht erinnern, wenn sie als Erwachsene zurückdenken.
Viele Jahre lang führte ich das Einmaleins dem Lehrplan entsprechend ein: Zehner- und Fünferreihe, Zweier-, Vierer- und Achterreihe, Dreier-, Sechser- und Neunerreihe, und zum Schluss die als schwierig geltende Siebenerreihe. Viele Kinder kannten die Fünfer- und die Zehnerreihe, fast alle die Zweierreihe. Auf den ersten Blick bot der Einstieg für die Kinder keinen Anreiz, keine Herausforderung. Jetzt bauen die Kinder alle Reihen gleichzeitig auf, indem sie Mengen bündelnd zerlegen. Dabei gewinnen sie Einblick in die Struktur aller Reihen. Pro Gruppentisch bekommen die Kinder eine von mir abgezählte Menge Plättchen (20, 30, 40 etc.) und den Auftrag, sie in lauter gleiche Teilmengen zu zerlegen (Bündel zu machen), jedoch ohne Rest.

Eine Gruppe fängt sofort an. Die Kinder bilden 15 Zweiergruppen. Die Menge 30 interessiert sie nicht. „Es geht.“ Die Gruppe, die 20 Plättchen hat, bildet 4 Fünfergruppen, ist rasch fertig, schiebt alles wieder zusammen und legt 5 Vierergruppen. Beides „geht“.
Die Kinder, die größere Mengen haben, brauchen länger. Die, die schon fertig sind, schauen dort zu, geben auch Tipps ab: „Mit 2 geht es immer.“ „Mit 10 auch.“ Die Gruppe mit der Menge 50 zählt erst einmal ab und legt dann 10 Fünfergruppen.
Die Gruppe, die 30 Plättchen hat, geht an ihren Tisch zurück, zählt 30 und macht 6 Fünfergruppen. Dann probieren sie es mit Vierergruppen und behalten einen Rest. „Es geht nicht.“

Nachdem alle mehrere Möglichkeiten gelegt haben, sollen sie sich für eine Variante entscheiden und diese liegen lassen. Dann machen wir einen Rundgang von Tisch zu Tisch. Jede Gruppe erzählt, was sie gemacht hat. Ich notiere Beispiele an der Wandtafel wie „20 ist 5 + 5 + 5 + 5“ und führe das Malzeichen ein: $4 \cdot 5 = 20$. Die Kinder wechseln nun die Tische, zerlegen die Mengen, die sie dort finden, und schreiben sie als Additionen an die Tafel.

Lars schlägt vor, auf die Additionen zu verzichten. „Wir wissen doch jetzt, wie wir es mit ‚mal' machen müssen." „Das wusste ich schon vorher", muss Damian draufsetzen. Christina sagt, man müsse doch immer nur die Häufchen zählen. „Am besten geht es, wenn man die Grüppchen schön ordnet", sagt Tamara. Das leuchtet allen ein.

Am folgenden Tag bekommen die Kinder den Auftrag, sich selbst eine Menge Plättchen zu holen und sie so zu bündeln, dass es 10 gleiche Bündel gibt.

Bald entdeckt Markus: „20 geht mit 2 und 30 geht mit 3." Jetzt probieren einige Gruppen die Mengen von 20 bis 90. An der Wandtafel stehen Beispiele wie 10 mal 5, 10 mal 8, aber auch solche wie 8 mal 4, 9 mal 6. Den Auftrag mit 10 Bündeln hatten einige nicht aufgenommen.
Zu 9 mal 6 erklärt Tina: „Da fehlen noch 6, dann ist es 10 mal 6." Damian sagt: „Zu 50 kann ich alles erklären: 1. Reihe: 1 mal 5, 2. Reihe: 2 mal 5", usw. Die anderen steigen darauf ein. Es scheint überhaupt nicht schwierig zu sein, Terme zu den Reihen zu formulieren und zu notieren. Bald stehen alle Reihen an der Tafel.

Am nächsten Tag schlagen die Kinder vor, Plättchen zu sortieren und die Rechnungen auf die entsprechende Seite im Zahlenalbum zu schreiben. Sie suchen sich die Reihen aus. Einige gehen sehr zielstrebig vor.

Damian und Lars zählen sofort 100 Plättchen ab und sortieren sie. Beim gemeinsamen Rundgang sagt Tamara: „Das ist ja die Hundertertabelle."

Nach einigen Tagen sind alle Reihen gelegt und notiert. Damit sind die Ziele von M0361 (Zahlen bündelnd zerlegen) erreicht. Das Modul M0318 (Knöpfe zählen) wird gern und schnell erledigt.
Damian findet das Knöpfe zählen „uncool", macht es aber dann ohne Murren, denn inzwischen habe ich für alle Module Punkte eingeführt. Damit möchte ich die Kinder langsam auf die Benotung vorbereiten. Die Kinder wissen jetzt, dass es für jedes Modul zwei Punkte gibt, wenn es erfolgreich bearbeitet wurde, und dass die Anzahl der Punkte beim Rückmeldegespräch am Ende des Jahres eine Rolle spielen wird und auch für Noten wichtig ist. Vorerst nehmen sie das zur Kenntnis und finden das Sammeln von Punkten „lustig". Es ist mir angenehm, dass das Sammeln der Punkte nicht zuviel Gewicht bekommt und die Kinder zuerst an den Inhalten interessiert sind.

In dieser Zeit fällt mein Blick auf eine Doppelseite einer Zeitung, die mit schwarzen, grauen und weißen Pferdchen voll bedruckt ist. Offenbar sehe ich alles mit der „Rechenbrille". Mir fällt sofort ein, man könnte die Mengen bündeln und so die Anzahlen bestimmen. Ich schneide den Text ab und zeige das Bild den Kindern. Die glauben zunächst, das sei eine Reklame für Reitunterricht. Ich erzähle ihnen, dass das eine Autoreklame sei und muss erklären, was PS sind. Dann gehen die Kinder an die Arbeit und wählen ganz unterschiedliche Wege: Sie zählen die Reihen senkrecht oder waagerecht, machen Zehnerbündel und Fünferbündel. Sie schaffen es, die Gesamtzahl genau oder annähernd zu bestimmen, obwohl sie eigentlich nur bis 100 zählen können. Die Anregung im Lernbuch (S. 42–43) greifen die Kinder auf und machen füreinander viele Arbeitsblätter. Diese werden mit Eifer bearbeitet, die Wege erklärt, bezweifelt, verteidigt.
Wir machen in der Klasse eine kleine Ausstellung zu dem Thema „Was man mit Malrechnungen zählen kann" (M0230). Die Kinder werden nicht müde, Beispiele zu suchen und mit in die Schule zu bringen. Suna bringt eine „4 mal 8"-Schachtel mit türkischen Keksen. Den Inhalt gibt es zum Pausentee, die Schachtel kommt in unsere Ausstellung.
Die Kinder gelangen zu der Einsicht, dass sich Mengen vielfach teilen lassen, dass manchmal ein Rest bleibt, aber auch, dass sich für eine Multiplikationsaufgabe nur gleiche Bündel eignen.
Diese Etappe war lustvoll. Alle Kinder waren in der Lage, Erfahrungen mit dem Zerlegen und dem Aufbau der Reihen zu machen. Lea sagt: „Das war die schönste Etappe meines Lebens."