Vom Bündelnden Zählen zur Multiplikation und Division

Im 1. Schuljahr geht die Zerlegung der Zahlen in Summen („Zahlenhäuser“) der Einführung der Summengleichung und dem Einspluseins voran. Analog bietet das bündelnde Zerlegen von Zahlen einen natürlichen Einstieg in die Produktgleichung und in das Einmaleins. Mit diesem Einstieg wird auch der einseitigen Interpretation des Gleichheitszeichens als Rechenbefehl („ergibt“) entgegen gewirkt.

Aufbau des Einmaleins und der Division

1. Bündelnd zählen: Zahlen multiplikativ zerlegen
2. Multiplikative Strukturen in der Umwelt entdecken
3. Bündel als Rechtecke anordnen,
   Punktfelder als symbolische Bündelungen erfassen
4. Reihen auf dem Zahlenband vergleichen
5. In der Einmaleins-Tabelle Gesetze entdecken und Rechnungen vernetzen
6. Geläufigkeit im Einmaleins gewinnen
7. Dividieren: verteilen und aufteilen
8. Fitness im Multiplizieren und Dividieren erreichen und bewahren

1. Bündelnd zählen: Zahlen multiplikativ zerlegen

Im 1. Schuljahr haben die Kinder erfahren, dass es zu jeder Zahl n genau n+1 additive Zerlegungen gibt. Zur Zahl 9 als Beispiel gibt es 10 verschiedene Additionsterme:

$9 = 0 + 9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = 9 + 0$

Das Zerlegen der 9 in gleiche Bündel geht nur auf drei Arten:

$9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3 = 9 \cdot 1$

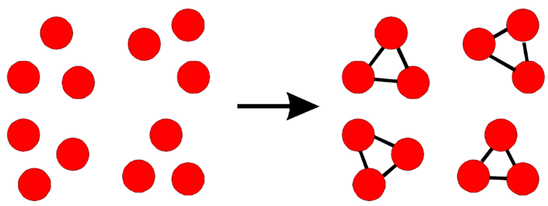
Beide Tatsachen können mit Plättchen erfasst und begriffen werden. Bei der additiven Zerlegung ist die Regel für alle Zahlen dieselbe. Bei der Zerlegung in Produkte drängt sich hingegen die Frage auf, welche Zahlen sich auf welche Arten als Produkte schreiben lassen. Ihre Zerlegbarkeit in Produkte ist eine ganz typische Eigenschaft der einzelnen Zahlen.

Vom Bündeln zum Einmaleins und zum Dividieren

Welche Unterschiede bestehen zwischen 23 und 24?

Dass 24 um 1 grösser als 23 ist, ist nur das Wenigste. 24 kann dreimal halbiert werden, 23 lässt sich gar nicht teilen. 24 kann man auch in 3, 4, 6, oder 8 Teile teilen. 24 lässt sich auf verschiedene Arten in Bündel zerlegen. Statt „24“ kann man auch sagen „zwei Dutzend“. 24 Stunden hat ein Tag, 24 Monate sind zwei Jahre.

Ein paar „Forschungsaufgaben“

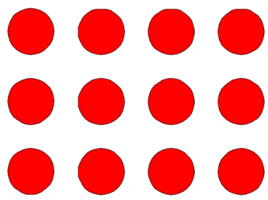


Zählt man in Dreierbündeln, so ergeben sich bei 12 Plättchen 4 Dreierbündel. Die zugehörige Malrechnung lautet dann:

4 • 3 = 12

Beim bündelnden Erfassen von Zahlen merken die Kinder schnell, dass es zu Zahlen Bündelungen gibt, die aufgehen, und solche, die nicht aufgehen. Damit erfahren sie eine wichtige Eigenschaft der Zahlen: ihre multiplikative Zerlegbarkeit. Diese Grunderfahrung bildet die Basis für das Verständnis der Multiplikation und der Division.

- Wer findet andere Zahlen, die man auch in Dreierbündeln zählen kann („Dreier-Zahlen“)?
- Gibt es Zahlen, die man zwar nicht in Dreierbündel aber in andere Bündel zerlegen kann?
- Welche Zahlen kann man gut bündeln, welche weniger gut?



Lässt sich eine Anzahl Dinge in gleiche Bündel aufteilen, kann man sie in einem Rechteck anordnen. Die beiden Faktoren der zugehörigen Malrechnung kann man an den Seiten des Rechtecks ablesen.

Beispiel: 12 Plättchen ergeben ein Rechteck mit auf einer Seite 3 und auf der anderen 4 Plättchen. Die Rechnung dazu lautet 12 = 4 • 3.

- Sucht weitere Zahlen, zu denen ein solches Rechteck passt.
- Bei welchen Zahlen geht das auf mehr als eine Art?
- Für welche Zahlen bis 100 gibt es die meisten Möglichkeiten?
  Wie viele sind es?

Material: Plättchen oder Knöpfe

2. Multiplikative Strukturen in der Umwelt entdecken

In unserer Umwelt gibt es viele Objekte, die bereits „gebündelt“ verpackt oder arrangiert sind. Diese lassen sich besonders einfach zählen.

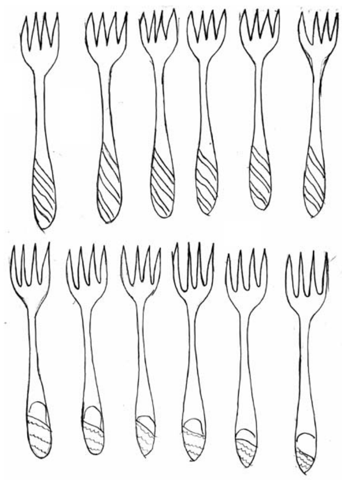
Wie viele Flaschen sind in der Kiste? Wenn man sie einzeln zählen will, muss man ganz genau hinschauen. Mit etwas rechnen geht es einfacher: In einer Reihe sind es vier, in der anderen drei Flaschen, also insgesamt

$3 \cdot 4 = 12$ Flaschen Apfelsaft.

Valbona hat Gabeln gezeichnet, zweimal sechs Stück. Zusammen sind das

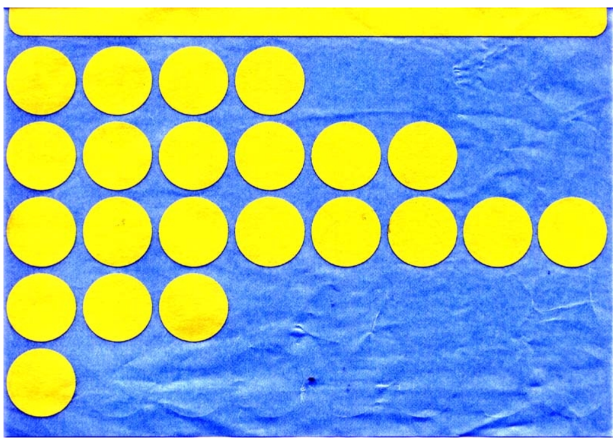
$2 \cdot 6 = 12$ Gabeln

- Jede dieser Gabeln hat 4 Zinken. Wie viele Zinken sind es dann bei allen Gabeln zusammen?
- Wie hat Valbona die Gabeln wohl so schön hingekriegt?



Mario hat in seinem Heft einen Bogen mit einem Vorrat an Klebepunkten. Immer wenn ihm etwas gelungen ist, klebt er einen Punkt in sein Heft und macht daraus ein strahlendes Smiley-Gesicht.

- Wie viele Klebepunkte waren ursprünglich auf dem vollen Bogen?
- Was macht wohl Mario, wenn ihm etwas speziell missrät?

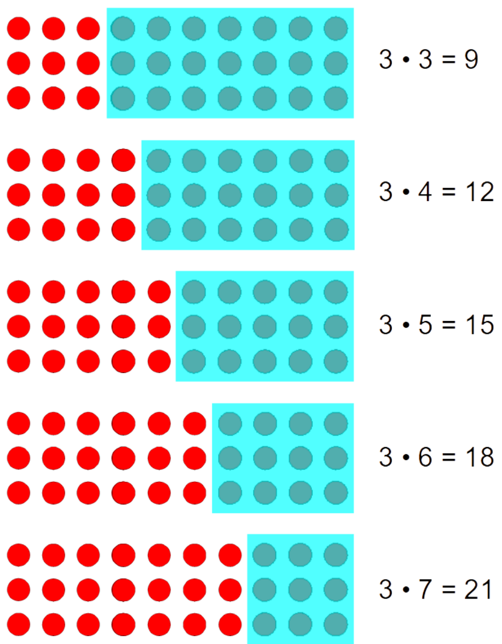


Material: Sammlung geeigneter Verpackungen

3. Bündel als Rechtecke anordnen, Punktfelder als symbolische Bündelungen erfassen

Wie findet man alle Dreierzahlen in einem bestimmten Bereich? Man kann dazu zwei bereits bekannte Werkzeuge einsetzen: Das Punktefeld oder das Zahlenband.

Zahlenreihen im Punktefeld



Mit dem Punktefeld kann man durch schrittweises Vergrössern eines Rechteckes alle Vielfachen einer festen Zahl in einem bestimmten Bereich erzeugen. Die geordneten Vielfachen einer Zahl bilden die zu ihr gehörige Reihe. So bilden z.B. alle Dreierzahlen die 3er-Reihe:

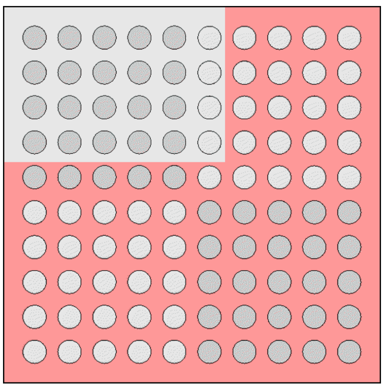
0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30

Aufgaben:

- Bilde aus Kopien des Hundert-Punktefelds alle Reihen.
- Welche Zahlen von 0 bis 100 kommen in diesen Reihen vor?
- Welche mehrfach? Welche am meisten?

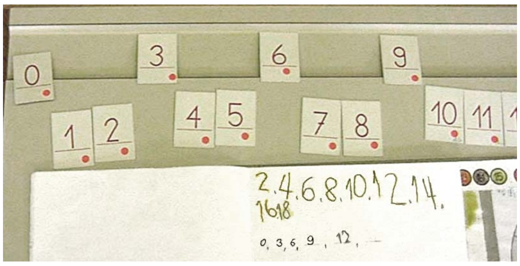
Auf dem Hunderter-Punktefeld können mit einem Winkel oder zwei Blättern alle Rechnungen des Einmaleins dargestellt werden.

Eine Fünfereinteilung durch eine leichte Färbung der Punkte erleichtert es den Kindern, Rechnungen der grösseren Zahlen individuell zu gliedern (z.B. 3 • 7 = 3 • 4 + 3 • 3) und so auf die ihnen am geläufigsten Rechnungen zurück zu greifen.



Material: Kopiervorlage Punktfelder, Karopapier, Loch-Schablone (Stanz-Abfall)

4. Reihen auf dem Zahlenband vergleichen



Legt man mit Zahlenkarten ein Zahlenband und verschiebt die Zahlen einer Reihe etwas nach oben, kann man die regelmässigen Abstände der Zahlen einer Reihe erkennen.

Bei dieser Darstellung wird auch gut sichtbar, dass die Null zu allen Reihen gehört. Beim rhythmischen Zählen bildet die Null den „Startplatz“ für alle Reihen.

Werden die einzelnen Reihen auf Zahlenbänder übertragen, können sie untereinander verglichen werden. Ein Vorteil dieser Darstellung ist, dass die Reihenzahlen in ihre Umgebung eingebettet bleiben. Beispiel:

4er	**0**	1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	**16**	17	18	19	**20**	21	22	23	**24**	25	26	27	**28**	29	30

6er	**0**	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**	13	14	15	16	17	**18**	19	20	21	22	23	**24**	25	26	27	28	29	**30**

Differenzierung: Poster mit allen Reihen bis 100 an der Wand,
im Heft nur soweit erarbeitet.

Material: Poster „Reihen auf dem Zahlenband“, Zahlenbänder (Kopiervorlage)

Zahlen auf dem Fussboden

Beim bündelnden Zählen werden mehrere Sinne angesprochen: Die Motorik bei der Handlung, der Hörsinn beim laut Zählen und die Optik, wenn Bündel arrangiert werden.

Punktbilder sprechen vor allem die visuell veranlagten Kinder an. Mit einem „begehbaren“ Zahlenband kann ein gewisser Ausgleich für alle anderen geschaffen werden. Das Bild zeigt eine Variante mit nummerierten Teppichplatten. Diese können auf vielfältige Art eingesetzt werden.

Im Zusammenhang mit den Reihen wird ein Zahlenband ausgelegt, das dann rhythmisch zählend abgeschritten werden kann. Wo erlaubt, kann das Zahlenband auf dem Fussboden auch permanent mit Klebepapier aufgebracht werden.

Allerdings: Auch das Ausbringen, Einsammeln, Sortieren der Teppiche sind Lernanlässe.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Wo der Platz reicht, kann mit den Teppichen eine Hunderter-Tafel ausgelegt werden. Die Kinder können sich dann nach Befehl auf die Reihenzahlen stellen und dergestalt die verschiedenen Reihenmuster auf der Hunderter-Tafel darstellen.

Material: Teppich-Quadrate, Hunderter-Tafel

5. In der Einmaleins-Tabelle Gesetze entdecken und Rechnungen vernetzen

Die Einmaleins-Tabelle ist gleich aufgebaut wie die Einspluseins-Tabelle des 1. Schuljahres. Als Verknüpfungstafel enthält sie alle Rechnungen des Einmaleins. In der Abbildung sind die sogenannten Kern-, Schlüssel- oder Königsaufgaben bereits eingetragen.

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9		15					30
4	0	4	8		16	20					40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12			30	36				60
7	0	7	14			35		49			70
8	0	8	16			40			64		80
9	0	9	18			45				81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Von diesem Gerüst ausgehend können die restlichen Aufgaben erschlossen werden – Je nach Lerntyp über Bündelungen, Alltagsmaterial, Punktfelder, Zahlenband und Reihen. Jedes noch leere Feld hat mindestens einen schon bekannten Nachbarn, über den es „erschlossen“ werden kann.

Die Einmaleins-Tabelle bietet nach den Punktefeldern einen weiteren Zugang zum Kommutativgesetz. Dieses wird zwar mit den Punktfeldern gut illustriert, in den Reihen auf dem Zahlenband bleibt es aber eher verborgen.

Die Einmaleins-Tabelle kann auch gut für eine Zwischenbilanz in der Klasse verwendet werden. Die Aufgabe lautet ganz einfach: Tragt in die leere Tabelle ein, was ihre schon wisst.

Das Bild zeigt Mario an der Arbeit. Er hat zuerst die Siebner- und darauf die Achterreihe eingetragen. Jetzt ist er an der Zweierreihe. Die meisten seiner Klasse begannen allerdings mit den Vielfachen von Null und Eins.

Einige Kinder der Klasse haben an dieser Stelle das Kommutativgesetz entdeckt.

Wie viele Aufgaben die Kinder eintragen können und welche Zeit sie dazu brauchen gibt einen guten Einblick in ihren Lernstand.

Material: Einmaleins-Tabelle als Tischvorlage und als Poster, leere Tabelle

6. Fitness im Einmaleins gewinnen und bewahren

In den vorangehenden Abschnitten sind verschiedene Zugänge zur Multiplikation, ihren Veranschaulichungen und Gesetzen dargestellt. Mit guten Vorstellungen und dem richtigen Verständnis steht eine tragfähige Basis für das reine Zahlenrechnen bereit. Das Bild der Einmaleins-Tabelle im vorhergehenden Abschnitt zeigt, wie klein die Zahl der schwierigeren Aufgaben eigentlich ist, wenn von dieser Basis ausgegangen werden kann.

Für das reine Rechentraining gibt es bereits ein umfangreiches Repertoire von Arbeitsblättern, Lernspielen und Trainingsprogrammen. Diesem soll hier nicht noch viel beigefügt werden. Dieser Abschnitt soll vielmehr festhalten, dass dieses Training nicht vergessen, aber nicht zu früh und mit Mass eingesetzt werden soll. Zwei auch für das Einzeltraining geeignete Ablegespiele sollen hier aber doch speziell erwähnt werden.

„Tschau-Sepp", Spiel für 2 bis 4 Spielende (M0512)

Karten mit den Einmaleinszahlen werden gemischt. Die Spielenden erhalten je 5 Karten, die restlichen kommen verdeckt auf einen Stapel. Abwechslungsweise werden Karten abgelegt:

- A legt eine Karte offen in die Mitte (z.B. 24)
- B darf eine Karte drauflegen, die zu einer gemeinsamen Reihe gehört (z.B. 18, 64, ...) und muss diese Reihe laut nennen. Wenn B nicht ablegen kann, muss er/sie eine Karte vom Stapel nehmen. Die Einer-Reihe gilt nicht. Es ist sinnvoll, auch die Zweier-Reihe auszuschliessen.
- Wer zuerst alle Karten abgelegt hat, gewinnt.

Das Spiel kann mit wenigen Reihen begonnen werden. Mit allen Einmaleinszahlen sind 42 Karten im Spiel, es können aber auch noch alle Reihenzahlen bis 100 dazu genommen werden.

Material: Zahlenkarten mit den Einmaleins-Zahlen

„Wurzeljoker", Spiel für 2 bis 4 Spielende (M0096)

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Der Spielplan besteht aus einer Einmaleinstabelle. Die 5-er und 10-er Kolonnen sind markiert, ebenso die Diagonale mit den Quadratzahlen.

Zahlenkärtchen mit den Ergebnissen der Malrechnungen werden gemischt. Alle Mitspielenden bekommen 5 Kärtchen, der Rest kommt auf einen Stapel. Im Spiel müssen sie nach folgenden Regeln abgelegt werden:

- In jeder Zeile muss zuerst die 5-er Zahl liegen.
- Die Kärtchen dürfen nur von der Mitte aus angelegt werden, (man kann also Zeilen „sperren"), beim Ablegen muss die zugehörige Rechnung laut hergesagt werden.
- Ausnahme: „Glücksfelder" (10-er Kolonne) dürfen direkt abgelegt werden, auch wenn die Linie noch leer ist.
- Die Quadratzahlen sind die „Joker". Wer eine solche abgelegt hat, darf noch eine zweite Karte anlegen.
- Wer nicht ablegen kann, muss eine Karte vom Stapel nehmen.

- Wer zuerst keine Karten mehr hat, gewinnt das Spiel.

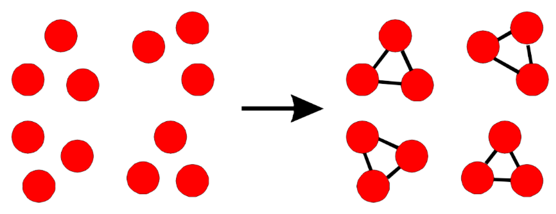
Varianten:

- Als Spielplan kann die leere Tabelle oder die Tabelle mit den vorgedruckten Malrechnungen verwendet werden.
- Das Spiel kann mit offenen oder verdeckten Karten gespielt werden.
- Das Spielmaterial eignet sich auch gut zum Training allein: Die Zahlenkärtchen werden gemischt und anschliessend abgelegt.

Material: Spielplan (große Einmaleins-Tabelle, ev. als Schreibunterlage), passende Zahlenkarten
Originalspiel von Max Giezendanner bei www.mathekreativ.ch

7. Dividieren: verteilen und aufteilen

Im Gegensatz zum Einspluseins, wo die Addition und die Subtraktion fast parallel eingeführt werden, kommt in den Lehrgängen und Handbüchern beim Einmaleins die Division als **formale** Operation erst relativ spät. Im bündelnden Aufteilen von Mengen und in der Frage „Zu welchen Reihen gehört die Zahl 30“ ist sie aber grundlegend vorbereitet.



Ein Vorteil des Zugangs zur Multiplikation über das bündelnde Zählen besteht darin, dass dieselben Handlungen und Anschauungsbilder auch zur Division führen.

Die Fragen und Rechnungen lauten aber verschieden:

Bündelnd zählen	**Verteilen**	**Teilen**
Wie viele Plättchen sind es	Wie viele Bonbons bekommt jedes Kind, wenn 12 Bonbons an 4 Kinder verteilt werden?	Wie viele Bündel gibt es, wenn die Zahl 12 in Dreierbündel aufgeteilt wird?
Rechnung:	Rechnung:	Rechnung:
4 • 3 = 12	12 : 4 = 3	12 : 3 = 4
Es sind 12 Plättchen	Jedes bekommt 3 Bonbons	Es gibt 4 Bündel

Situationen neu interpretieren und Divisionen dazu schreiben

Die Situation des Teilens ist den Kindern vertraut und das gerechte Teilen interessiert sie. Abzählbare Dinge wie Nüsse oder Bonbons können sie handelnd verteilen. Der Unterricht kann dieses Interesse nutzen. Aus der Situation heraus ist es einfach, die Bezüge herzustellen.

Beispiel Nüsse verteilen

Fragen:

- Wie viele Nüsse sind es?
- Wie viele bekommt jedes Kind, wenn wir sie verteilen?
- Immer drei kommen in einen Naschsack. Wie viele solche Säcke kann mit den Nüssen versehen?

Wie lauten jeweils die Rechnungen?

Beispiel Süssigkeiten verteilen

„Wie kann der Inhalt einer Schachtel mit Süssigkeiten verteilt werden?“ Eine Frage, die den Kindern geläufig ist – und auch näher liegt als die Frage nach der Anzahl. Nun geht es darum, die Divisionen als formale Rechnungen dazu zu schreiben.

Aufgabe:

- Wie viele Schokoküsse bekommt jedes Kind, wie viele bleiben übrig, wenn es 1, 2, 3, . . . Kinder sind?

Eine Tabelle gibt Antworten auf die Frage „Was wäre, wenn . . .?“ und Anlass zu vielen Rechnungen.

Anzahl Kinder	Schokoküsse pro Kind	Rest	Rechnung	Kontrolle
1	15	0	15 : 1 = 15	15 • 1 = 15
2	7	1	15 : 2 = 7 Rest 1	2 • 7 + 1 = 15
3	5	0	15 : 3 = 5	5 • 3 = 15
4	3	3	15 : 4 = 3 Rest 3	3 • 4 + 3 = 15

Material: Alltags-Gegenstände zum Verteilen, Abfüllen

Vom Bündeln zum Einmaleins und zum Dividieren

Dividieren mit der Einmaleins-Tabelle

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Die Einmaleins-Tabelle (z.B. als Schreibunterlage, Poster) bekommt bei der Division eine neue Bedeutung als Rechenhilfe und zur Vernetzung von Multiplikation und Division.

Beispiele:

54 : 9 = ? Suche in 9-er Kolonne nach 54
Ergebnis der Suche: 54 = 6 • 9, somit ist 54 : 9 = 6

52 : 6 = ? Suche in 6-er Kolonne nach 52
Ergebnis der Suche: 52 gibt es in dieser Kolonne nicht,
die nächst kleiner Zahl ist 48 = 8 • 6,
die Rechnung lautet 52 : 6 = 8 Rest 4

Rechnungen mit der Null:

0 : 4 = ? Suche in 4-er Kolonne nach 0
Ergebnis der Suche: 0 = 0 • 4, somit ist 0 : 4 = 0

5 : 0 = ? Suche in 0-er Kolonne nach 5
Ergebnis der Suche: 5 gibt es in dieser Kolonne nicht,
die nächst kleinere Zahl ist 0, diese kommt aber in jeder Zeile vor,
das bedeutet, dass das Ergebnis der Rechnung jede Zahl plus ein Rest 5 sein kann, 5 : 0 ist nicht bestimmbar.

Auf dem Zahlenband Reste ablesen.

Wie gross ist der Rest bei der Division 78 : 3? Auf dem Zahlenband kann man das direkt ablesen: 78 ist eine Dreierzahl, also ist der Rest 0. Wie gross ist der Rest bei der Division 87 : 6? Die nächst kleinere Sechserzahl ist 84, also ist der Rest 3.

8. Fitness im Multiplizieren und Dividieren erreichen und bewahren

Ein auf Einsicht und Vernetzung beruhender Aufbau der Multiplikation und Division berücksichtigt die Tatsache, dass diese Art des Lernens effizienter und nachhaltiger ist als das reine Memorieren von Rechensätzen. Gerade lernschwächere Kinder sind auf diese Lernhilfen angewiesen.

Nach wie vor bleibt aber die Geläufigkeit im Einmaleins, die Fertigkeit im Kopfrechnen ein Hauptziel des Unterrichts. Einsichten und Erkenntnisse allein verschaffen diese noch nicht. Übungen auf dieser Grundlage ermöglichen aber schnellere Fortschritte, führen zu lustvoller Steigerung der Rechenkunst. Manche Übung, die als Krücke zum Auswendiglernen mühsame Arbeit bedeutet, bekommt einen spielerischen Charakter, wenn sie nur noch zur Vervollkommnung der Rechenfertigkeit dient.

Ohne periodische Auffrischung droht jede Fertigkeit verloren zu gehen. Es ist daher sinnvoll, auch relativ mechanische Übungen zum Kopfrechnen als „Fitness-Training" immer wieder in den Unterricht einzubauen. Die besten Effekte erzielen dabei Übungen, die allen – auch den schwächeren – eine Bestätigung ihrer Leistungsfähigkeit erbringen.

Beispiel:

Reihen würfeln mit dem Schulwürfel. Ein erster Wurf legt die Reihe fest (z.B. 6er). anschliessend gilt es, die gewürfelten Vielfachen zu nennen. Die Übung wird regelmässig (z.B. zu zweit täglich je 3 Minuten) gemacht. Jedes Kind notiert sich die Anzahl der richtigen Rechnungen zur Reihe, die es geschafft hat. Die Partner kontrollieren sich gegenseitig.

Material: (Schul-)Würfel, Arbeitsheft, Lernkartei Einmaleins